Série n° 3
– Fonctions de Plusieurs Variables:
Limites et Continuité –

Exercice 1
Dans chaque cas, déterminez et représentez le domaine de définition des fonctions données.

1· $f(x,y) = \frac{\sqrt{x^2-y}}{\sqrt{y}}$.

2· $f(x,y) = \frac{\ln(y)}{\sqrt{x-y}}$.

3· $f(x,y) = \ln(x+y)$

Exercice 2
d'après la définition de la limite des fonctions de plusieurs variables montrer que.

1°) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^3}{(x-1)^2+y^2} = 0$

2°) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2+xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$

3°) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} = 0$

4°) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2} = 0$

Exercice 4
Etudier ces limites existent-elles dans $\mathbb{R}$?

1°) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \frac{1}{x-y}$ - 2°) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x)-y}{x-\sin(y)}$

3°) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ - 4°) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2+xy}{x^2+y^2}$

5°) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{6x^2y}{x^2+y^2}$ - 6°) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$

Exercice 4
Soit $f : \mathbb{R}^2 \setminus (0,0) \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = \frac{6x^2y}{x^2+y^2}$ Montrer que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ de trois façons :

1. d'après la définition,
2. d'après le théorème de pincement,
3. en utilisant les coordonnées polaires.

Exercice 5
Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction ainsi définie par:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 6
Etudiez la continuitée sur $\mathbb{R}^3$ de la fonction suivante :

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{xy^3z^3}{x^4+y^6+z^8} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Exercice 7
Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$ par

$$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

est-elle prolongeable par continuité au point $(0,0)$.